ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΩΝ:

Έστω οι δυναμοσειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ με ακτίνες σύγκλισης R_1 και R_2 αντίστοιχα.

1η) Η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$, έχει:

- ακτίνα σύγκλισης $R=\min\{R_1, R_2\}$, $R_1 \neq R_2$
- διάστημα σύγκλισης την τομή των διαστημάτων σύγκλισης των δύο δυναμοσειρών.

2η) Εάν η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει στο $x=x_0$ τότε

$$\lim_{x \to x_0} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \lim_{x \to x_0} a_n x^n \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$$

3η) Μια δυναμοσειρά στο διάστημα $(-R, R)$ που συγκλίνει, μπορούμε να την:

- Παραγωγίσουμε όρο προς όρο:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$$

- Ολοκληρώσουμε όρο προς όρο:

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (a_n t^n) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Έστω οι δυναμοσειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot x^n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$

Παρατηρούμε ότι:

$R_1 = 1$ και $R_2 = +\infty$ καθώς τα διαστήματα σύγκλισης είναι:
$[-1, 1]$ και $(-\infty, +\infty)$ αντίστοιχως

Επομένως,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n!} \right) x^n \quad \text{με} \quad R = \min\{R_1, R_2\} = 1$$

και διάστημα σύγκλισης την τομή των δύο διαστημάτων.
Δηλαδή είναι το $[-1, 1)$

Άσκηση 1η

Να προσδιορίσετε την ακτίνα και το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 2^n}\left(x-\frac{3}{2}\right)^n, \quad \text{όπου } c_n = \frac{1}{n\cdot 2^n}\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)^n, \ n\in\mathbb{N}$$

ΛΥΣΗ

Πρόκειται για μια δυναμοσειρά με κέντρο το $\frac{3}{2} = x_0$

Βήμα 1ο) Χρησιμοποιώντας το Κρ. λόγου D'Alembert:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}\left(x-\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n\cdot 2^n}\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)^n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\cdot 2^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}\left(x-\frac{3}{2}\right)\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\cdot \cancel{2^n}}{(n+1)\cancel{2^n}\cdot 2}\left(x-\frac{3}{2}\right)\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left|x-\frac{3}{2}\right|\cdot\frac{n}{2(n+1)}\right) = \frac{1}{2}\left|x-\frac{3}{2}\right|\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{2}\left|x-\frac{3}{2}\right|.$$

Για να συγκλίνει η δυναμοσειρά μας θα πρέπει από θεωρία

Βήμα 2ο)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| < 1 \Rightarrow \frac{1}{2}\left|x-\frac{3}{2}\right| < 1 \Rightarrow \left|x-\underbrace{\frac{3}{2}}_{x_0}\right| < \underbrace{2}_{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 < x-\frac{3}{2} < 2 \Rightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{7}{2}$$

Το διάστημα $\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$ είναι το <u>ΠΙΘΑΝΟ</u> διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς.
Το τελικό διάστημα σύγκλισης για να οριστεί θα πρέπει να εξετάσουμε εάν συγκλίνει <u>και</u> στα άκρα.

Βήμα 3ο) Εξετάζουμε σύγκλιση στα άκρα

α) $x=-\frac{1}{2} \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}\left(-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n\cdot\frac{1}{n\cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cancel{2^n}\cdot\frac{1}{n\cdot\cancel{2^n}} =$

$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ ...

Έτσι για να εξετάσουμε εάν αυτή συγκλίνει εφαρμόζουμε το Κριτήριο του Leibnitz

- Είναι η ακολουθία φθίνουσα;
- Είναι μηδενική και θετική;

Έστω, η ακολουθία $a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ η οποία είναι φθίνουσα αφού $n+1 > n \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow a_{n+1} < a_n, n \in \mathbb{N}$ και μηδενική αφού $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ενώ θετική αφού $\frac{1}{n} > 0$

Συνεπώς, συγκλίνει (δηλ. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} < +\infty$).

β) $x = \frac{7}{2} \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} \left(\frac{7}{2} - \frac{3}{2} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \cancel{2^n}} \cdot \cancel{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

(η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ γνωστό ότι αποκλίνει).

Άρα, το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $\left[-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$ και ακτίνα $R = 2$.

Άσκηση 2η

Να εξετάσετε τη σύγκλιση των σειρών:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot x^n}{n!}$ (για ποια $x \in \mathbb{R}$ συγκλίνει;), $a_n = \frac{n^2 \cdot x^n}{n!}, n \in \mathbb{N}$

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + (-3)^n}{6^n}$ (να υπολογιστεί το άθροισμα), $\beta_n = \frac{2^n + (-3)^n}{6^n}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

ΛΥΣΗ

i) Εφαρμόζουμε το κρ. λόγου D'Alembert:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)^2 x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^2 \cdot x^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2 \cdot |x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^2 \cdot |x|^n}{n!}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^{\cancel{2}} \cdot n!}{\cancel{(n+1)!} \cdot n^2} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{\cancel{|x|^n}} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n^2} \cdot |x| \right) = 0 < 1$$

Άρα, η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$

β) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+(-3)^n}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^n}{6^n}+\frac{(-3)^n}{6^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] =$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=1}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}+\frac{2}{3} = \frac{13}{6}$

(Γεωμετρική σειρά. $\left|\frac{1}{3}\right|<1$ και $\left|-\frac{1}{2}\right|<1$)

Άσκηση 3η

Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n}}{n^n}$ και ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ (για ποια $x\in\mathbb{R}$ συγκλίνει;)

ΛΥΣΗ

i) Από το Κρ. ν-οστής ρίζας του Cauchy.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7^{2n}/n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{7^{2n/n}}{(n^n)^{1/n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{7^2}{n} = 0 < 1$$

Άρα, η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n}}{n^n} < +\infty$

ii) Παίρνουμε το κρ. λόγου D'alembert

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}\cdot n}{n+1\cdot |x|^n} = \lim_{n\to\infty} |x|\cdot\frac{n}{n+1} = |x|$$

α) Εάν το $|x|<1 \to x\in(-1,1)$ τότε συγκλίνει στο $(-1,1)$
αλλά το $(-1,1)$ είναι ΠΙΘΑΝΟ Διάστημα σύγκλισης
εξετάζουμε και τα άκρα.

Για $x=1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, Για $x=-1$ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} < +\infty$

(Από το κρ. Leibnitz)

Τότε το διάστημα σύγκλισης θα είναι το: $[-1,1)$ με κέντρο το $x_0=0$ και ακτίνα $R=1$

β) Εάν το $|x|>1 \to x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ προφανώς και θα έχουμε απόκλιση.